

國立臺北科技大學 102 學年度碩士班招生考試

系所組別：1201、1202、1203 製造科技研究所

第一節 微分方程 試題

第一頁 共一頁

注意事項：

1. 本試題共五大題，配分共 100 分。
2. 請標明大題、子題編號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須在答案卷之答案欄內作答，否則不予計分。

一、一質量為 m 之物體在地面以初速度 v_0 垂直向上拋出，若物體所受的空氣阻力與該物體的速度 $v(t)$ 成正比，試求

1. 物體的運動方程式，(5%)
2. 物體的速度表示式 $v(t)$ ， t 為時間，(10%)
3. 物體到達最大高度所需之時間。(5%)

二、試求以下邊界值問題之特徵值(eigenvalues)及特徵函數(eigenfunctions)。

1. $y'' + (\lambda + 1)y = 0, y'(0) = 0, y'(1) = 0$, (10%)
2. $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, y'(e^{-1}) = 0, y(1) = 0$ 。(10%)

三、Solve $y'' + 4y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = -1$, where $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$. (20%)

四、Solve the linear system $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \csc t \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{X}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (20%)

五、考慮一細直長度 L 之均質金屬棒，其截面積固定不變，熱擴散率 k 為常數。金屬棒沿著 x 軸放置，由 0 至 L ，而左端($x=0$)為絕熱(insulated)，右端($x=L$)之溫度保持零度。在時間 $t=0$ 時，金屬棒的溫度分布函數為 $f(x)$ 。假設金屬棒的側邊有隔熱且沒有熱損失，則金屬棒的溫度僅為 x 與 t 之函數 $u(x, t)$ ，試

1. 就以上敘述，建立該金屬棒溫度函數 $u(x, t)$ 的邊界值問題(即寫出偏微分方程式、邊界條件與初值條件等)，(8%)
2. 求出 $u(x, t)$ 。(12%)